Задача 1

На коммутационную систему поступает простейший поток с интенсивностью μ=1+ПцН3. Определить за время t=1+ВцН3 вероятности $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, $P_{i\geq4}(t)$.

Решение

Простейшим потоком вызовов (потоком Пуассона) называется стационарный, ординарный поток без последействия. Простейший поток полностью определяется распределением Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

где $P_k(t)$ - вероятность поступления ровно k вызовов за интервал времени t;
k - параметр простейшего потока. Интенсивность μ потока Пуассона численно равна его параметру λ.

Вероятность поступления не менее k вызовов за время [0, t)

$$P_{i\geq k}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

Данная функция табулирована в литературных источниках. При ее самостоятельном вычислении можно ограничиваться 4-5 членами ряда.

$$\mu = 1 + 2 = 3$$

$$t = 1 + 7 = 8$$

$$P_0(t) = \frac{(3 \cdot 8)^0}{0!} e^{-3 \cdot 8} = 3,77 \cdot 10^{-11}$$

$$P_1(t) = \frac{(3 \cdot 8)^1}{1!} e^{-3 \cdot 8} = 9,06 \cdot 10^{-10}$$

$$P_2(t) = \frac{(3 \cdot 8)^2}{2!} e^{-3 \cdot 8} = 1,09 \cdot 10^{-8}$$

$$P_3(t) = \frac{(3 \cdot 8)^3}{3!} e^{-3 \cdot 8} = 8,69 \cdot 10^{-8}$$

$$P_{i\geq4} = \sum_{i=4}^{8} \frac{(3 \cdot 8)^i}{i!} e^{-3 \cdot 8} =$$

$$= 5,22 \cdot 10^{-7} + 2,50 \cdot 10^{-6} + 0.00001 + 0.000034 + 0.000103$$
$$= 1,5 \cdot 10^{-4}$$

Задача 2

Определить вероятности поступления k=3 и k ≥ 3 вызовов за промежуток t = (120 — НЗ) с, если параметр простейшего потока λ = (150 - НЗ) выз./ч.

Решение.

$$\boldsymbol{t = 120 - 27 = 93} \text{ с.}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 150 - 27 = 123} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{123/3600 = 0,034} \text{ выз./с.}$$

$$\boldsymbol{P_3(t) = \frac{(93 \cdot 0,034)^3}{3!} e^{-93 \cdot 0,034} = 0,223098}$$

$$\boldsymbol{P_{i \geq 3}(t) = \sum_{i=3}^{7} \frac{(93 \cdot 0,034)^i}{i!} e^{-93 \cdot 0,034} =}$$

$$\boldsymbol{= 0,223098 + 0.176359 + 0.111529 + 0.058766 + 0.02655 = 0.596}$$

Задача 3

Для простейшего потока с параметром λ=(299 + НЗ) выз./ч определить значение $k = k_м$, при котором вероятность $P_k(t) = [P_k(t)]_{макс}$ за время t=(89 + НЗ) с. Определить величины вероятностей $P_k(t)$ и построить распределение вероятностей для $k=k_м$; $k=k_м\pm2$; $k=k_м\pm4$.

Решение

$$\boldsymbol{\lambda = 299 + 27 = 326} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{326/3600 = 0,091} \text{ выз./с.}$$

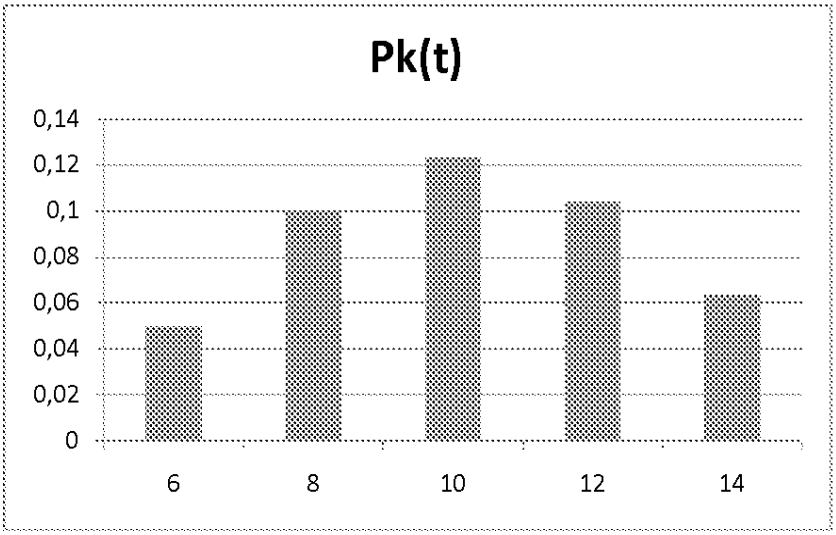
$$\boldsymbol{t = 89 + 27 = 116} \text{ с.}$$

$$\boldsymbol{P_0(t) = \frac{(0,091 \cdot 116)^0}{0!} e^{-0,091 \cdot 116} = 0.000026}$$

$$\boldsymbol{P_1(t) = \frac{(0,091 \cdot 116)^1}{1!} e^{-0,091 \cdot 116} = 0.000275}$$

Дальнейшие расчеты сведем в таблицу, по данным таблицы построим график распределения вероятностей для $k=k_м$; $k=k_м\pm2$; $k=k_м\pm4$.

k	$P_k(t)$	
0	0.000026	
1	0.000275	
2	0.001451	
3	0.005104	
4	0.01347	
5	0.028438	
6	0.050032	
7	0.075449	
8	0.099555	
9	0.116767	
10	0.123259	МАКС
11	0.118284	
12	0.10405	
13	0.084489	
14	0.063705	
15	0.044831	
16	0.029577	
17	0.018366	



Из таблицы видно, что максимальное значение вероятности при k=10.

Задача 4

Телефонистка справочного бюро в среднем выдает μ=(9 + НЗ) справок в час. Определить вероятность того, что случайно поступивший вызов получит отказ ввиду занятости телефонистки, если обслуживание каждой заявки занимает (91 - НЗ) с.

Решение

$$\mu = \mathbf{9 + 27 = 36} \text{ выз./ч.} = \mathbf{36/3600 = 0,001} \text{ выз./с.}$$

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{91 - 27 = 64} \text{ с.}$$

Промежуток времени между двумя последовательными моментами поступления вызовов не зависит от других промежутков и распределен по закону

$$\boldsymbol{F(t) = P(z_k < 1) = 1 - e^{-\lambda t}}$$

$$\boldsymbol{F(t) = 1 - e^{-0.001 \cdot 64} = 0.062}$$

Вероятность отказа определим по формуле для двух и более вызовов:

$$\boldsymbol{P_{i \geq 2}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}}$$

$$\boldsymbol{P_{i \geq 2}(t) = \sum_{i=2}^{5} \frac{(0,001 \cdot 64)^i}{i!} e^{-0,001 \cdot 64} =}$$

$$\boldsymbol{= 0,001921 + 0,000041 + 6,51 \cdot 10^{-7} + 8,39 \cdot 10^{-9} = 0,00196}$$

Задача 5

На двустороннюю межстанционную линию поступают два простейших потока вызовов с параметрами λ_1=(70 + НЗ) выз./ч и λ_2=(110 + НЗ) выз./ч. При занятии линии на противоположный конец передается сигнал блокировки длительностью τ = 100 мс. Определить вероятность блокировки межстанционной линии и вероятность встречного соединения, то есть одновременного (за время τ) поступления вызовов с обоих концов соединительной линии.

Решение

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 70 + 27 = 97} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{97/3600 = 0{,}0269} \text{ выз./с.}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = 110 + 27 = 137} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{137/3600 = 0{,}0381} \text{ выз./с.}$$

τ = 100 мс=0,1 с.

$$\boldsymbol{P_1 = 1 - e^{-\lambda_1 \cdot \tau} = 1 - e^{-0.0269 \cdot 0.1} = 0.002686}$$

$$\boldsymbol{P_2 = 1 - e^{-\lambda_2 \cdot \tau} = 1 - e^{-0.0381 \cdot 0.1} = 0.003803}$$

Вероятность блокировки встречного соединения:

$$\boldsymbol{P_{\text{встр}} = P_1 \cdot P_2 = 1.02 \cdot 10^{-5}}$$

Задача 6

При расчете мощности зуммерного генератора на АТС допускается его перезагрузка не более чем в (5 + ВцНЗ) случаях из 1 000. Определить, на обслуживание какого количества вызовов одновременно должна быть рассчитана мощность зуммерного генератора, если емкость АТС N = (1500 + ПцНЗ • 100) номеров, среднее количество вызовов от одного источника c=2,4 выз./ч, среднее время слушания зуммерного сигнала t =3 с.

Решение

$$\boldsymbol{n = 5 + 7 = 12}$$

$$\boldsymbol{N_1 = 1000}$$

$$\boldsymbol{N = 1500 + 2 \cdot 100 = 1700}$$

$$\boldsymbol{c = 2.4} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{2.4/3600 = 0{,}000667} \text{ выз./с.}$$

$$\boldsymbol{T = N \cdot t = 1700 \cdot 3 = 5100}$$

$$\boldsymbol{n_1 = T \cdot c = 5100 \cdot 0.000667 = 3{,}4 \approx 4} \text{ вызова одновременно}$$

Задача 7

Для потока Пальма задана функция $\varphi_0(t) = e^{-at}$. Доказать, что при этом поток Пальма становится простейшим потоком.

Решение:

Распределение промежутков времени для потока Пальма задается следующим соотношением:

$$F_k(t) = P(z_k < t) = 1 - \varphi_0(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

что соответствует простейшему потоку.

Задача 8

Для потока Пальма функция $\varphi_0(t) = e^{-t}(2+1)$. Определить функции распределения $P(z_1 < t)$ и $P(z_k < t)$.

Решение

$$P(z_1 < t) = \lambda \int_0^t \varphi_0(\tau) d\tau =$$

$$= \lambda \int_0^t e^{-\tau}(2+\tau) d\tau = \lambda \int_0^t 2e^{-\tau} d\tau + \lambda \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau =$$

$$= -2\lambda e^{-t} + 2\lambda + \lambda(-t-1)e^{-t} + \lambda = -3\lambda e^{-t} + 3\lambda - \lambda t e^{-t}$$

$$P(z_1 < t) = 1 - \varphi_0(\tau) = 1 - e^{-t}(2+t)$$

Задача 9

При исследовании потока Бернулли оказалось, что на каждом 20-минутном интервале случайным образом поступает по (10 + ВцНЗ) вызовов. Для 10-минутного интервала определить вероятности $P_k(0,t)$, k = 0,1,2,3,4 и $P_{k\geq 5}(0,t)$. Для найденных значений $P_k(0,t)$ построить распределение вероятностей.

Решение

$$\boldsymbol{n = 10 + 7 = 17}$$

T=20 мин t=10 мин

Для потока Бернулли вероятность поступления к вызовов в любом промежутке [0,t), где t < T, определяется выражением:

$$P_k(0,t) = C_n^k \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k}$$

где C_n^k - число сочетаний из n по k определяется по формуле:

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$$P_0(0,10) = C_{17}^0 \left(\frac{10}{20}\right)^0 \left(1 - \frac{10}{20}\right)^{17-0} = 7.6 \cdot 10^{-6}$$

$$P_1(0,10) = C_{17}^1 \left(\frac{10}{20}\right)^1 \left(1 - \frac{10}{20}\right)^{17-1} = 0.0001297$$

Остальные вычисления сведем в таблицу:

k	C_{17}^k	P_k	k	C_{17}^k	P_k
0	1	$7{,}6 \cdot 10^{-6}$	9	24310	0.18547
1	17	0.0001297	10	19448	0.14838
2	136	0.00104	11	12376	0.09442
3	680	0.00519	12	6188	0.04721
4	2380	0.01816	13	2380	0.01816
5	6188	0.04721	14	680	0.00519
6	12376	0.09442	15	136	0.00104
7	19448	0.14838	16	17	0.0001297
8	24310	0.18547	17	1	$7{,}6 \cdot 10^{-6}$

График распределения вероятностей $P_k(0,t)$.

$$P_{k\geq 5}(0,t) = \sum_{i=k}^{t} P_k(0,t) = 0.79$$

Задача 10

Концентратор обслуживает (10 + ВцНЗ) источников нагрузки. Для 15-минутного интервала времени t определить вероятность поступления одного и хотя бы одного вызова, если в начале интервала t все источники были свободны. Интенсивность свободного источника $\boldsymbol{\alpha}$ = (20 -ВцНЗ)/10 выз./ч.

Решение

$$n = 10 + 7 = 17$$

$$t = 15 \text{ мин}$$

$$\alpha = (20 - 7)/10 = 1{,}3\text{выз/ч.} = 1{,}3/60 = 0{,}022\text{выз/мин.}$$

Для потока с простым последействием $\lambda_i = \alpha(n - i)$,

$$\boldsymbol{P(t_{\text{св}} < t) = 1 - e^{-\alpha t}}$$

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}022(17 - 1) = 0{,}347}$$

$$\boldsymbol{P(t_{\text{св}} < t) = 1 - e^{-0{,}347 \cdot 15} = 0{,}994}$$

Задача 11

Задана характеристика неординарности неординарного пуассоновского потока в виде следующего ряда распределения.

L_i	1	2	3	4	5	6	7
P_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,1	0,05	0

Определить вероятности поступления трех и четырех вызовов на интервале t = (100 + НЗ) с, если параметр потока вызывающих моментов λ=(150 + НЗ) выз./ч.

Решение

$$t = 100 + 27 = 127 \text{ с.}$$

$$\lambda = 150 + 27 = 177 \text{ выз/ч.} = 177/3600 = 0{,}0492 \text{ выз/с.}$$

$$P_k = e^{-\lambda t} \sum_k \frac{(\lambda \cdot p_k \cdot t)^{j_k}}{j_k!}$$

$$P_3 = e^{-0{,}0492 \cdot 127} \left(\frac{(0{,}0492 \cdot 0{,}1 \cdot 127)^1}{1!} \cdot \frac{(0{,}0492 \cdot 0{,}2 \cdot 127)^2}{2!} \cdot \frac{(0{,}0492 \cdot 0{,}35 \cdot 127)^3}{3!} \right) = 0.0016$$

$$P_4 = 0.00013$$