Задача 1

На коммутационную систему поступает простейший поток с интенсивностью μ=1+ПцН3. Определить за время t=l+ВцН3 вероятности $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, $P_{i\geq4}(t)$.

Решение

Вероятность поступления не менее k вызовов за время [0, t)

$$P_{i\geq k}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

Данная функция табулирована в литературных источниках**.** При ее самостоятельном вычислении можно ограничиваться 4-5 членами ряда.

$$\mu = 1 + 0 = 1$$

$$t = 1 + 9 = 10$$

$$P_0(t) = \frac{(1 \cdot 10)^0}{0!} e^{-1 \cdot 10} = 0.000045$$

$$P_1(t) = \frac{(1 \cdot 10)^1}{1!} e^{-1 \cdot 10} = 0.000454$$

$$P_2(t) = \frac{(1 \cdot 10)^2}{2!} e^{-1 \cdot 10} = 0.00227$$

$$P_3(t) = \frac{(1 \cdot 10)^3}{3!} e^{-1 \cdot 10} = 0.007567$$

$$P_{i\geq4} = \sum_{i=4}^{8} \frac{(1 \cdot 10)^i}{i!} e^{-1 \cdot 10} =$$

$$= 0.018917 + 0.037833 + 0.063055 + 0.090079 + 0.112599 = 0.32$$

Задача 2

Определить вероятности поступления k=3 и k ≥ 3 вызовов за промежуток t = (120 — НЗ) с, если параметр простейшего потока λ = (150 - НЗ) выз./ч.

Решение.

$$\boldsymbol{t = 120 - 9 = 111} \text{ с.}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 150 - 9 = 141} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{141/3600 = 0,039166} \text{ выз./с.}$$

$$\boldsymbol{P_3(t) = \frac{(111 \cdot 0,039166)^3}{3!} e^{-111 \cdot 0,039166} = 0,177}$$

$$\boldsymbol{P_{i \geq 3}(t) = \sum_{i=3}^{7} \frac{(111 \cdot 0,039166)^i}{i!} e^{-111 \cdot 0,039166} =}$$

$$\boldsymbol{= 0,177208 + 0.192599 + 0.167462 + 0.121338 + 0.07536 = 0.734}$$

Задача 3

Для простейшего потока с параметром λ=(299 + Н3) выз./ч определить значение $k = k_м$, при котором вероятность $P_k(t) = [P_k(t)]_{макс}$ за время t=(89 + Н3) с. Определить величины вероятностей $P_k(t)$ и построить распределение вероятностей для $k=k_м$; $k=k_м\pm2$; $k=k_м\pm4$.

Решение

$$\boldsymbol{\lambda = 299 + 9 = 308} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{308/3600 = 0{,}086} \text{ выз./с.}$$

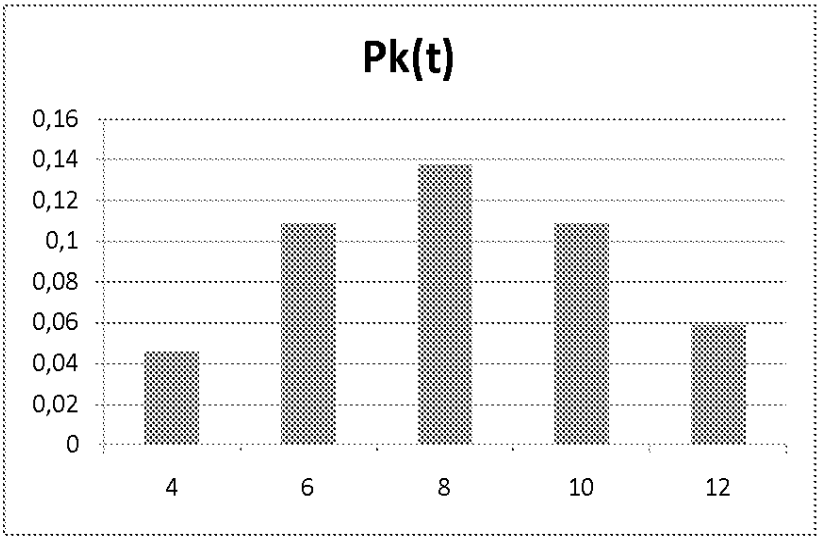
$$\boldsymbol{t = 89 + 9 = 98} \text{ с.}$$

$$\boldsymbol{P_0(t) = \frac{(0{,}086 \cdot 98)^0}{0!} e^{-0{,}086 \cdot 98} = 0.000219}$$

$$\boldsymbol{P_1(t) = \frac{(0{,}086 \cdot 98)^1}{1!} e^{-0{,}086 \cdot 98} = 0.001843}$$

Дальнейшие расчеты сведем в таблицу, по данным таблицы построим график распределения вероятностей для $k=k_м$; $k=k_м\pm2$; $k=k_м\pm4$.

k	$P_k(t)$	
0	0.000219	
1	0.001843	
2	0.007766	
3	0.021817	
4	0.045968	
5	0.077483	
6	0.108838	
7	0.131041	
8	0.138052	МАКС
9	0.129278	
10	0.108955	
11	0.08348	
12	0.05863	
13	0.038011	



Из таблицы видно, что максимальное значение вероятности при k=8.

Задача 4

Телефонистка справочного бюро в среднем выдает μ=(9 + НЗ) справок в час. Определить вероятность того, что случайно поступивший вызов получит отказ ввиду занятости телефонистки, если обслуживание каждой заявки занимает (91 - НЗ) с.

Решение

$$\mu = \mathbf{9 + 9 = 18} \text{ выз./ч.} = \mathbf{18/3600 = 0{,}005} \text{ выз./с.}$$

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{91 - 9 = 82} \text{ с.}$$

Промежуток времени между двумя последовательными моментами поступления вызовов не зависит от других промежутков и распределен по закону

$$F(t) = P(z_k < 1) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-0.005 \cdot 82} = 0.3363$$

Вероятность отказа определим по формуле для двух и более вызовов:

$$\boldsymbol{P_{i \geq 2}(t)} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{\lambda t})^i}{\boldsymbol{i}!} \boldsymbol{e}^{-\lambda t}$$

$$\boldsymbol{P_{i \geq 2}(t)} = \sum_{i=2}^{5} \frac{(\mathbf{0{,}005 \cdot 82})^i}{\boldsymbol{i}!} \boldsymbol{e}^{-0{,}005 \cdot 82} =$$

$$= \mathbf{0{,}05578 + 0{,}007623 + 0{,}000781 + 0{,}000064 = 0{,}064}$$

Задача 5

На двустороннюю межстанционную линию поступают два простейших потока вызовов с параметрами λ_1=(70 + НЗ) выз./ч и λ_2=(110 + НЗ) выз./ч. При занятии линии на противоположный конец передается сигнал блокировки длительностью τ = 100 мс. Определить вероятность блокировки межстанционной линии и вероятность встречного соединения, то есть одновременного (за время τ) поступления вызовов с обоих концов соединительной линии.

Решение

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 70 + 9 = 79} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{79/3600 = 0{,}0219} \text{ выз./с.}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = 110 + 9 = 119} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{119/3600 = 0{,}0331} \text{ выз./с.}$$

τ = 100 мс=0,1 с.

$$\boldsymbol{P_1 = 1 - e^{-\lambda_1 \cdot \tau} = 1 - e^{-0.0219 \cdot 0.1} = 0.002187}$$

$$\boldsymbol{P_2 = 1 - e^{-\lambda_2 \cdot \tau} = 1 - e^{-0.0331 \cdot 0.1} = 0.003304}$$

Вероятность блокировки встречного соединения:

$$\boldsymbol{P_{\text{встр}} = P_1 \cdot P_2 = 7.2 \cdot 10^{-6}}$$

Задача 6

При расчете мощности зуммерного генератора на АТС допускается его перезагрузка не более чем в (5 + ВцНЗ) случаях из 1 000. Определить, на обслуживание какого количества вызовов одновременно должна быть рассчитана мощность зуммерного генератора, если емкость АТС N = (1500 + ПцНЗ • 100) номеров, среднее количество вызовов от одного источника c=2,4 выз./ч, среднее время слушания зуммерного сигнала t =3 с.

Решение

$$\boldsymbol{n = 5 + 9 = 14}$$

$$\boldsymbol{N_1 = 1000}$$

$$\boldsymbol{N = 1500 + 0 \cdot 100 = 1500}$$

$$\boldsymbol{c = 2.4} \text{ выз./ч.} = \boldsymbol{2.4/3600 = 0{,}000667} \text{ выз./с.}$$

$$\boldsymbol{T = N \cdot t = 1500 \cdot 3 = 4500}$$

$$\boldsymbol{n = T \cdot c = 4500 \cdot 0.000667 = 3} \text{ вызова одновременно}$$

Задача 7

Для потока Пальма задана функция $\varphi_0(t) = e^{-at}$. Доказать, что при этом поток Пальма становится простейшим потоком.

Решение:

Распределение промежутков времени для потока Пальма задается следующим соотношением:

$$F_k(t) = P(z_k < t) = 1 - \varphi_0(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

что соответствует простейшему потоку.

Задача 8

Для потока Пальма функция $\varphi_0(t) = e^{-t}(2+1)$. Определить функции распределения $P(z_1 < t)$ и $P(z_k < t)$.

Решение

$$P(z_1 < t) = \lambda \int_0^t \varphi_0(\tau) d\tau =$$

$$= \lambda \int_0^t e^{-\tau}(2+\tau) d\tau = \lambda \int_0^t 2e^{-\tau} d\tau + \lambda \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau =$$

$$= -2\lambda e^{-t} + 2\lambda + \lambda(-t-1)e^{-t} + \lambda = -3\lambda e^{-t} + 3\lambda - \lambda t e^{-t}$$

$$P(z_1 < t) = 1 - \varphi_0(\tau) = 1 - e^{-t}(2+t)$$

Задача 9

При исследовании потока Бернулли оказалось, что на каждом 20-минутном интервале случайным образом поступает по (10 + ВцНЗ) вызовов. Для 10-минутного интервала определить вероятности $P_k(0,t)$, k = 0,1,2,3,4 и $P_{k\geq 5}(0,t)$. Для найденных значений $P_k(0,t)$ построить распределение вероятностей.

Решение

$$\boldsymbol{n = 10 + 9 = 19}$$

T=20 мин t=10 мин

Для потока Бернулли вероятность поступления к вызовов в любом промежутке [0,t), где t < T, определяется выражением:

$$P_k(0,t) = C_n^k \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k}$$

где C_n^k - число сочетаний из n по k определяется по формуле:

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

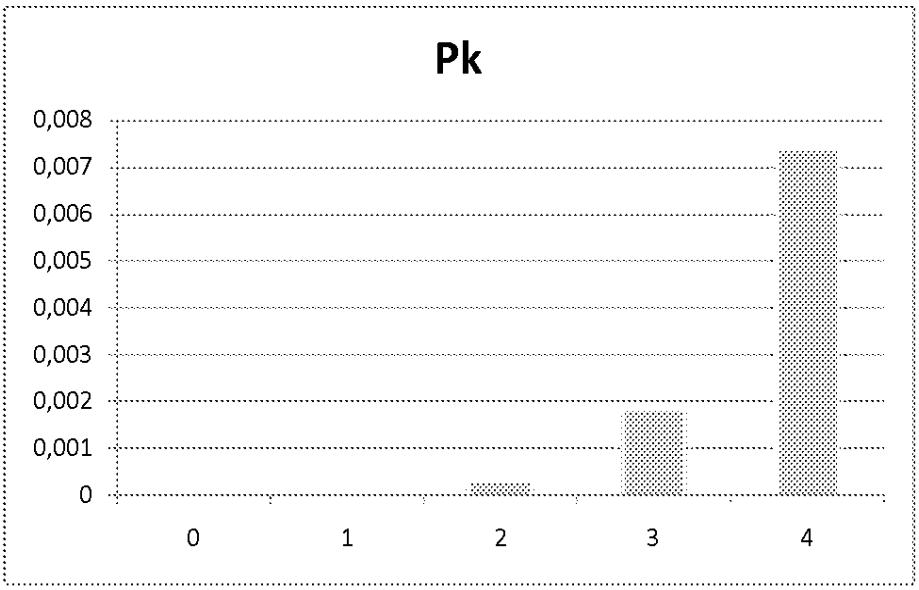
$$P_0(0,10) = C_{17}^0 \left(\frac{10}{20}\right)^0 \left(1 - \frac{10}{20}\right)^{19-0} = 1{,}9 \cdot 10^{-6}$$

$$P_1(0,10) = C_{17}^1 \left(\frac{10}{20}\right)^1 \left(1 - \frac{10}{20}\right)^{19-1} = 0.0000362$$

Остальные вычисления сведем в таблицу:

k	C_{17}^k	P_k	k	C_{17}^k	P_k
0	1	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$	10	92378	0.1761971
1	19	0.0000362	11	75582	0.1441612
2	171	0.0003262	12	50388	0.0961075
3	969	0.0018482	13	27132	0.0517502
4	3876	0.0073929	14	11628	0.0221786
5	11628	0.0221786	15	3876	0.0073929
6	27132	0.0517502	16	969	0.0018482
7	50388	0.0961075	17	171	0.0003262
8	75582	0.1441612	18	19	0.0000362
9	92378	0.1761971	19	1	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$

График распределения вероятностей $P_k(0,t)$, в интервале k = 0,1,2,3,4


Pk
0,008
0,007
0,006
0,005
0,004
0,003
0,002
0,001
0
0
1
2
3
4

Задача 10

Концентратор обслуживает (10 + ВцНЗ) источников нагрузки. Для 15-минутного интервала времени t определить вероятность поступления одного и хотя бы одного вызова, если в начале интервала t все источники были свободны. Интенсивность свободного источника $\boldsymbol{\alpha}$ = (20 -ВцНЗ)/10 выз./ч.

Решение

$$n = 10 + 9 = 19$$

$$t = 15 \text{ мин}$$

$$\alpha = (20 - 9)/10 = 1{,}1\text{выз/ч.} = 1{,}1/60 = 0{,}018\text{выз/мин.}$$

Для потока с простым последействием $\lambda_i = \alpha(n - i)$,

$$\boldsymbol{P(t_{\text{св}} < t) = 1 - e^{-\alpha t}}$$

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}018(19 - 1) = 0{,}324}$$

$$\boldsymbol{P(t_{\text{св}} < t) = 1 - e^{-0{,}324 \cdot 15} = 0{,}992}$$

Задача 11

Задана характеристика неординарности неординарного пуассоновского потока в виде следующего ряда распределения.

L_i	1	2	3	4	5	6	7
P_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,1	0,05	0

Определить вероятности поступления трех и четырех вызовов на интервале t = (100 + НЗ) с, если параметр потока вызывающих моментов λ=(150 + НЗ) выз./ч.

Решение

$$t = 100 + 9 = 109 \text{ с.}$$

$$\lambda = 150 + 9 = 159 \text{ выз/ч.} = 159/3600 = 0{,}0441 \text{ выз/с.}$$

$$P_k = e^{-\lambda t} \sum_k \frac{(\lambda \cdot p_k \cdot t)^{j_k}}{j_k!}$$

$$P_3 = e^{-0{,}0441 \cdot 109} \left(\frac{(0{,}0441 \cdot 0{,}1 \cdot 109)^1}{1!} \cdot \frac{(0{,}0441 \cdot 0{,}2 \cdot 109)^2}{2!} \cdot \frac{(0{,}0441 \cdot 0{,}35 \cdot 109)^3}{3!} \right) = 0.0015$$

$$P_4 = 0.00005$$